4. Ecuații diferențiale de ordin superior

4.1. Ecuații liniare

O problemã inportantã este rezolvarea ecuațiilor diferențiale de ordin mai mare ca 1. Sunt puține ecuațiile pentru care se poate preciza forma analiticã a soluției. Cel mai frecvent utilizate sunt ecuațiile liniare.

Forma generalã a ecuației liniare de ordin n este

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x) \qquad (6)$$

Ecuația liniarã omogenã asociatã ecuației (6) este

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0 \qquad (7)$$

În legãturã cu ecuațiile liniare şi omogene se poate demonstra urmatorul rezultat important.

Teorema 1 a) Dacã $p \in N$ şi $y_1, y_2, ..., y_p$ sunt soluții ale ecuației (7) iar $C_1, C_2, ..., C_p \in R$ atunci

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_py_p$$

este soluție a ecuației (7).

b) Mulțimea soluțiilor ecuației (7) formeazã un spațiu vectorial de dimensiune *n*.

c) Dacã ecuația (7) admite soluția complexã $y = u + i \cdot v$ atunci funcțiile reale u şi v sunt soluții ale ecuației (7).

Observație : pentru determinarea soluției generale e ecuației omogene trebuie determinate *n* soluții liniar independente

Teorema 2 Soluțiile $y_1, y_2, ..., y_n : I \to R$ ale ecuației (7) sunt liniar independenta dacã şi numai dacã existã $x_0 \in I$ astfel încât determinantul

$$W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1'(x) & ... & y_1'(x) \\ y_2(x) & y_2'(x) & ... & y_2'(x) \\ .... & .... & .... & .... \\ y_n(x) & y_n'(x) & ... & y_n'(x) \end{vmatrix}$$

(numit wronskianul sistemului) sã fie nenul în x_0.

Observații : 1) Teorema Abel-Ostrogradski-Liouville aratã cã, dacã *I* este un interval ce conține pe x_0 şi $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x_0) \neq 0$, atunci $W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I$

2) Dacã $y_1, y_2, ..., y_n$ sunt soluții liniar independente ale ecuației (7) şi $C_1, C_2, ..., C_n \in R$ atunci soluția generalã a ecuației (7) este

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n . \qquad (8)$$

În cazul sistemelor cu coeficienți constanți determinarea soluțiilor liniar independente se face cu ajutorul ecuației caracteristice, dar reprezintã o problemã complicatã în cazul sistemelor cu coeficienți variabili.

Pentru sistemele neomogene sa poate arãta cã :
Teorema 3 : Soluția generalã a ecuației (6) este suma dintre soluția generalã a ecuației omogene ataşatã, (7), şi o soluție particularã a ecuației (6).

Metoda de rezolvare a ecuațiilor liniare are trei paşi:
- se rezolvã ecuația omogenã şi se obține soluția y_G
- se determinã o solutie y_P a ecuației neomogene
- se scrie soluția generalã a ecuației neomogene $y = y_G + y_P$.

4.1.1. Ecuații liniare cu coeficienți constanți

A1) **Rezolvarea ecuației omogene**
Forma generalã a unei ecuații cu coeficienți constanți este

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (9)$$

Problema rezolvãrii ecuației (9) se reduce deci la determinarea unul sistem fundamental de soluții. În cele ce urmeazã prezentãm principala metodã de rezolvare pentru ecuațiile liniare.
O soluție a ecuației se cautã sub forma $y(x) = e^{\lambda x}$, prin analogie cu cazul $n = 1$. Prin înlocuire în ecuația (9) se obține, dupã simplificarea cu $e^{\lambda x}$, ecuația caracteristicã

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \qquad (10)$$

Teorema 4 : Fie $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ soluțiile ecuației (10).

a) - dacã $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ sunt reale şi distincte ale ecuației (10), atunci $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_n x}$ sunt soluții liniar independente ale ecuației (9).

b) - dacã λ_1 este rãdãcinã realã cu ordinul de multiplicitate p pentru ecuația (10), atunci $e^{\lambda_1 x}$, $xe^{\lambda_1 x}$, …, $x^{p-1}e^{\lambda_1 x}$ sunt p soluții liniar independenteale ecuației (9).

c) -dacã $\lambda_1 = a + ib$ este rãdãcinã complexã de ordinul p a ecuației (10) atunci

$$\begin{array}{ll}
e^{ax}\cos(bx), & e^{ax}\sin(bx) \\
xe^{ax}\cos(bx), & xe^{ax}\sin(bx) \\
x^2e^{ax}\cos(bx), & x^2e^{ax}\sin(bx) \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
x^{n-1}e^{ax}\cos(bx), & x^{n-1}e^{ax}\sin(bx)
\end{array}$$

sunt soluții liniar independente ale ecuației (9).

Sistemul fundamental de soluții se obține prin însumarea soluțiilor liniar independente corespunzãtoare tuturor rãdãcinilor ecuației (10), iar soluția generalã a ecuației (9) se obține folosind formula (8) .

Exemple : Sã se determine soluția generalã a urmãtoarelor ecuații :

1. $y'''-6y''+11y'-6y=0$

Ecuația caracteristicã este $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0$ şi are soluțiile $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$, Se aplicã a) din Teorema 4 şi se obține sistemul fundamental de (trei) soluții format din $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$, $y_3=e^{3x}$. Soluția generalã este

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$$

2. $y'''+3y''+3y'+y=0$

Ecuația caracteristicã este $\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$ şi are soluțiile $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$. Se aplicã b) din Teoremã pentru $p=3$. Sistemul fundamental de (trei) soluții este format din $y_1=e^x$, $y_2=xe^x$, $y_3=x^2e^x$, iar soluția generalã este

$$y(x)=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$$

3. $y''+4y'+5y=0$

Ecuația caracteristicã este $\lambda^2+4\lambda+5=0$ şi are soluțiile $\lambda_1=-2+i$ şi $\lambda_2=-2-i$ deci se aplicã c) din Teoremã pentru $a=-2, b=1, p=1$. Sistemul fundamental de (douã) soluții este format din soluțiile $y_1=e^{-2x}\cos x$ şi $y_2=e^{-2x}\sin x$ iar soluția generalã este

$$y(x)=C_1e^{-2x}\cos x+C_2e^{-2x}\sin x$$

4. $y^{IV}-4y'''+5y''-4y'+4y=0$

Ecuația caracteristicã este $\lambda^4-4\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda+4=0$ cu soluțiile $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=i$ şi $\lambda_4=-i$.

Soluția generalã este

$$y(x)=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+C_3\cos x+C_4\sin x$$

A2) Determinarea unei soluții particulare a ecuației neomogene

Forma generalã a ecuației neomogene cu coeficienți constanți este

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x).$$

Nu existã metode generale de determinare a unei soluții particulare dar, în unele cazuri simple, se pot folosi rezultatele urmãtoare :

Dacã $f(x)=P(x)$ este un polinom de grad k atunci soluția particularã este un polinom de acelaşi grad, cu coeficienți necunoscuți care se vor determina prin înlocuirea în ecuație.

a) Dacã $f(x)=e^{ax}P(x)$ unde $P(x)$ este un polinom de grad k existã douã situații

- Dacã a nu este rãdãcinã a ecuației caracteristice soluția particularã se cautã sub forma $y_P=e^{ax}Q(x)$, unde Q este un polinom de grad k cu coeficienți necunoscuți

- Dacã a exte rãdãcinã de ordin r a ecuației caracteristice atunci soluția particularã se cautã sub forma $y_P=x^r e^{ax}Q(x)$, unde Q este un polinom de grad k cu coeficienți necunoscuți

b) Dacã $f(x)=e^{ax}\left(P(x)\cos(bx)+Q(x)\sin(bx)\right)$ atunci existã de asemeni douã situații

- Dacã $z=a+bi$ nu este soluție a ecuației caracteristice soluția particularã se cautã sub forma $y_p(x)=e^{ax}\left(S(x)\cos(bx)+T(x)\sin(bx)\right)$, unde $R(x)$ şi $S(x)$ sunt polinoame cu coeficienți necunoscuți avand drept grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q

- Dacã $z=a+bi$ este soluție de ordin r a ecuației caracteristice soluția particularã se cautã sub forma $y_p(x)=x^r e^{ax}\left(S(x)\cos(bx)+T(x)\sin(bx)\right)$, unde $T(x)$ şi $S(x)$ sunt polinoame cu coeficienți necunoscuți avand drept grad cel mai mare dintre gradele lui P şi Q.

În unele situații, pentru determinarea soluțiilor particulare, se poate aplica principiul superpoziției :

Dacã y_{P1} şi y_{P2} sunt soluții ale ecuațiilor $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+....+a_n(x)y=f(x)$, respectiv

$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=g(x)$, atunci $y_{P!}+y_{P2}$ este soluție a ecuației

$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=f(x)+g(x)$.

Exemple : Sã se determine câte o soluție particularã pentru urmãtoarelor ecuații :

1. $y''-2y'+y=x$

Funcția $f(x)$ este un polinom de gradul I, deci soluția particularã se cautã sub forma $y_P(x)=ax+b$. Atunci $y'(x)=a$ şi $y''(x)=0$. Introducând în ecuație obținem $0-2a+ax+b=x$ şi din identificarea coeficienților rezultã $a=1$ şi, adicã $b=2$. Soluția particularã este $y_P(x)=x+2$.

Soluția generalã a ecuației este $y(x)=C_1e^x+C_2xe^x+x+2$

2. $y''-2y'+y=xe^x$

Deoarece $f(x)=xe^x=e^{1\cdot x}P(x)$ se încadrează la b) pentru $a=1,\ P(x)=x$ şi $a=1$ este rădăcină dublă a ecuației caracteristice , soluția particulară se va căuta sub forma $y_P(x)=x^2e^x(Ax+B)$.

Atunci $y'(x)=e^x\left(Ax^3+Bx^2+3Ax^2+2x\right)$

şi $y''(x)=e^x\left(Ax^3+Bx^2+6Ax^2+4Bx+6Ax+2B\right)$. Introducând în ecuație obținem $e^x(6Ax+2B)=xe^x$. Din identificarea coeficienților se obține $A=1/6$ şi $B=0$.

Soluția particulară este deci $y_P=x^3e^x/6$.

Soluția generală a ecuației este $y(x)=C_1e^x+C_2xe^x+x^3e^x/6$.

3. $y''+y=x\sin x$

Funcția $f(x)=x\sin x=e^{0x}(0\cdot\cos x+x\sin x)$ se încadrează la c) pentru $a=0,\ b=1,\ P(x)=0$ şi $Q(x)=x$. Deoarece $z=0+i$ este soluție a ecuației caracteristice $\lambda^2+1=0$, soluția particulară se va căuta sub forma $y_P=xe^{0x}\left[(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x\right]$. Înlocuin în ecuație şi identificând coeficienții se obține sistemul

$$2A+2D=0,\ 4C=0,\ -2B+2C=0,\ -4A=1$$

cu soluția $A=1/4,\ B=0,\ C=0,\ D=1/4$. Soluția perticulară este deci $-x^2\cos x/4+x\sin x/4$.

Soluția generală a ecuației este $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-x^2\cos x/4+x\sin x/4$

4.1.2. Ecuații cu coeficienți variabili

Pentru determinarea soluției generale a ecuației omogene cu coeficienți variabili nu exista metode generale. Dacă însă această soluție poate fi precizată, pentru determinarea unei soluții particlare se poate folosi metoda variației constantelor.

Teorema 5: Fie $C_1y_1+C_2y_2+...+C_ny_n$ soluția generală a ecuației omogene

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0.$$

Dacă $C_1(x),C_2(x),...,C_n(x)$ satisfac sistemul

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2+....+C_n'(x)y_n=0 \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'+....+C_n'(x)y_n'=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}+C_2'(x)y_2^{(n-2)}+....+C_n'(x)y_n^{(n-2)}=0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}+C_2'(x)y_2^{(n-1)}+....+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x) \end{cases}$$

atunci $y(x)=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2+...+C_n(x)y_n$ **este soluție a ecuației (7)**

Exemplu : Sã se determine soluția generalâ a ecuației $xy''+y'=x,\ \ x>0$

Se noteazã $y'=z$. Ecuația omogenã asociatã este $xz'+z=0$ .Rezultã $z=C_1\frac{1}{x}$ adicã $y=C_1\ln(x)+C_2$ Se folosește metoda variației constantelor pentru $y_1(x)=\ln x$ şi $y_2(x)=1$. Sistemul devine

$$\begin{cases} C_1'(x)\ln x+C_2'=0 \\ C_1'(x)\frac{1}{x}+C_2'\cdot 0=x \end{cases} \text{ cu soluțiile } \begin{cases} C_1(x)=x^2 \\ C_2(x)=-x^2\ln x \end{cases}. \text{ Rezultã}$$

$$\begin{cases} C_1(x)=\frac{x^3}{3}+A \\ C_2(x)=-\frac{x^3}{3}\ln x+\frac{x^3}{9}+B \end{cases}.$$

Soluția generalã a ecuației este $y(x)=\frac{x^3}{9}+A\ln x+B$.

Observație: Metoda variației constantelor poate fi folositã si pentru determinarea soluțiilor particulare ale ecuațiilor omogene cu coeficienți constanți atunci când funcția $f(x)$ nu se încadreazã în situațiile prezentate anterior.

Exemplu: Sã se determine soluția generalã a ecuației $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$**,** $x>0$ **.**

Soluția generalã a ecuației omogene este $y_G(x)=C_1e^x+C_2xe^x$. Se aplicã variația constantelor pentru $y_1(x)=e^x$ şi $y_2(x)=xe^x$.

Sistemul obținut este $\begin{cases} C_1'e^x+C_2'xe^x=0 \\ C_1'e^x+C_2'\left(e^x+xe^x\right)=\frac{e^x}{x} \end{cases}$ cu soluțiile $\begin{cases} C_1(x)=-x+A \\ C_2(x)=\ln x+B \end{cases}$.

Soluția generalã a ecuației este $y(x)=(-x+A)e^x+xe^x(\ln x+B)$.

4.2. Ecuații incomplete

Ecuațiile diferențiale incomplete de ordin *n* sunt ecuații (în general neliniare) în expresia cãrora nu apar toate derivatele funcției necunoscute pânã la ordinul *n-1* . Penrtu rezolvarea lor se folosesc substitutii care le micşoreaza ordinul.

4.2.1 Ecuații in care funcția necunoscutã apare doar prin derivatele sale

Ecuațiile de forma $F\left(x,y^{(k)},y^{(k+1)},...,y^{(n)}\right)=0$ se reduc la o ecuație de ordin *n-k* prin substituția $z=y^{(k)}$.

Exemplu : $y''=\sqrt{1+(y')^2}$ se transforma într-o ecuație de ordinul I folosind substituția $z=y'$. Ecuația $z'=\sqrt{1+z^2}$ este o ecuație cu variabile separabile şi are soluția generalã $z=\frac{1}{2C}e^{-x}-\frac{C}{2}e^{x}$. Rezultã deci cã

$y(x)=\int z(x)dx=C_1-\frac{1}{2C}e^{-x}-\frac{C}{2}e^{x}$.

4.2.2. Ecuații în care variabila independentã nu apare explicit

Aceste ecuații au forma $F\left(y,y',...,y^{(n)}\right)=0$.

Se noteazã $y'=p(y)$. Atunci

$$y''=(y')'=(p(y))'=p'(y)y'=p\cdot p'(y)$$
$$y'''=(y'')'=\left(p\cdot p''+(p')^2\right)\cdot p$$
$$..............................$$

Si ecuația devine $f\left(y,p,p',....p^{(n-1)}\right)=0$. Aceeaşi procedurã se poate aplica pentru a micşora ordinul în continuare.

Sunt numeroase cazurile în care derivata apare în ecuație doar la puteri pare. În acest caz se face notația $p=(y')^2$.

Exemplu : $y\cdot y''=1+(y')^2$.

Se noteazã $p=(y')^2$. Rezultã cã $p'(x)=p'(y(x))y'(x)=2y'(x)y''(x)$ deci $y''=p'/2$.

Din ecuația cu variabile separabile $p'=2(1+p)\cdot\frac{1}{y}$ rezultã $p=Cy^2-1$ adicã $y'=\pm\sqrt{Cy^2-1}$.

Prin integrare directă de obține $\frac{1}{\sqrt{C}y}\ln\left(\sqrt{C}y+\sqrt{Cy^2-1}\right)=\pm x+A$.

Soluția ecuației este $y=\frac{\left(C_1e^{\pm\sqrt{C}x}\right)^2-1}{2\sqrt{C}\left(C_1e^{\pm\sqrt{C}x}\right)}$.

Exerciții propuse :

Determinați soluțiile generale ale următoarelor ecuații :

1. $y''-4y'+4y=x^2$ **R :** $y(x)=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{1}{8}\left(2x^2+4x+3\right)$

2. $y''-y'+y=x^2+6$ **R :** $y(x)=e^{x/2}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+x^2+2x+6$

3. $y''+2y'+y=e^{2x}$

R : $y(x)=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{9}e^{2x}$

4 $y''-8y'+7y=14$

R : $y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{7x}+2$

5. $y''-y'=e^{x}$

R : $y(x)=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+\frac{x}{2}e^{x}$

6. $y''+y'-6y=xe^{2x}$

R : $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x\left(\frac{x}{10}-\frac{1}{25}\right)e^{2x}$

7. $y''+y=\cos x$

R : $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{2}x\sin x$

8. $y''+y=\sin^2 x$

R : $y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{6}\cos(2x)$

9. $y'''-13y''+12y=0$

R : $y(x)=C_1+C_2e^{x}+C_3e^{12x}$

10. $y'''-y=0$

R : $y(x)=C_1e^{x}+e^{-x/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+C_3\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$

11. $y^{IV}+4y=0$

R :
$y(x)=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$

12. $y^{IV}-2y'''+y''=e^{x}$

R : $y(x)=C_1+C_2x+\left(C_3+C_4x+\frac{x^2}{2}\right)e^{x}$

13. $y''+2y'+y=\frac{e^{-x}}{x}$**,** $x>0$

R : $y(x)=(C_1+xC_2)e^{-x}+xe^{-x}\ln x$

14.
$x^2y''-2xy'+2y=2+2x^3\sin 2x$

R : ec. omogenã are soluția $y(x)=C_1x+C_2x^2$
$y(x)=1+C_1x+C_2x^2-x\sin 2x/2-x^2\cos 2x$

15. $x^2y''+4xy'+2y=\ln(1+x)$

R: ec omogenã are soluția $y(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$

$y(x)=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\frac{(1+x)^2}{2x^2}\ln(1+x)-\frac{3}{2x}-\frac{3}{4}$